Problèmes de mécanique continue

Exercice 1 :

Imaginons qu'il soit possible - mis à part le problème d'instabilité - de construire une colonne de section constante aussi haute qu'on le désire. Si cette colonne est en granit, déterminer sa hauteur maximale.
Pour le granit :
Masse volumique $\rho = 2700$ kg/m^3
Résistance ou contrainte de rupture en compression σ_c=18 kN/cm^2.

Exercice 2 :

Un câble en acier pour mine, long de 600 m, est formé de 3 tronçons ; chaque tronçon mesure 200 m et a une section constante. Ce câble doit supporter en service un poids $Q = 30$ kN et l'acier a une contrainte admissible de 18 kN/cm^2, et une masse volumique de 7800 kg.m^{-3}. Dimensionner ce câble (déterminer A_1, A_2 et A_3) ; trouver ensuite son allongement total.

Exercice 3 :

Un prisme rectangulaire droit de longueur l, hauteur h et largeur w est composé d'un matériau linéaire élastique, isotrope et homogène (voir figure 1).

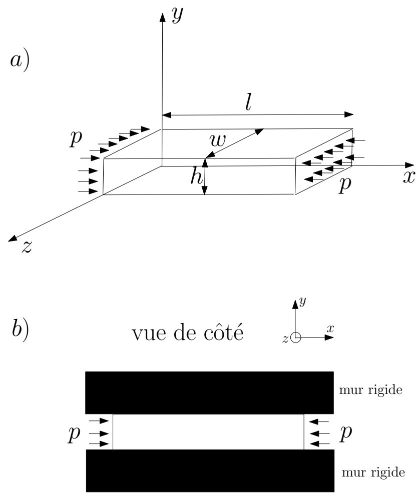


FIGURE 1 – Géométrie du prisme pour les cas a) et b)

a) Le prisme est soumis à une pression uniforme sur les faces d'abscisse $x = 0$ et $x = l$. Toutes les autres faces sont libres.
   1. Exprimer le tableau des conditions aux limites.
   2. Exprimer les composantes du tenseur des contraintes et des déformations infinitésimales.
   3. En déduire le module d'élasticité effectif qui est défini par :

$$E_{eff} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} \tag{1}$$

   en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν.

b) Le prisme est soumis, comme pour le cas a), à une pression uniforme sur les faces d'abscisse $x = 0$ et $x = l$. De plus, le prisme est en contact sans frottement avec des murs rigides d'ordonnée $y = 0$ et $y = h$. Les autres faces ($z = 0$ et $z = w$) sont libres.

1. Exprimer le tableau des conditions aux limites.
2. Exprimer les composantes du tenseur des contraintes et des déformations infinitésimales (Indication : les conditions aux limites imposent ici que $\epsilon_{yy} = 0$ en tout point).
3. En déduire le module d'élasticité effectif qui est défini par :

$$E_{eff} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}} \tag{2}$$

en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν.

c) Enfin, le prisme est soumis, comme pour le cas a), à une pression uniforme sur les faces d'abscisse $x = 0$ et $x = l$. Cette fois, le prisme est en contact sans frottement avec des murs rigides dans les deux autres directions (ordonnée $y = 0$, $y = h$, $z = 0$ et $z = w$).

1. Exprimer le tableau des conditions aux limites.
2. Exprimer les composantes du tenseur des contraintes et des déformations infinitésimales.
3. En déduire le module d'élasticité effectif qui est défini par :

$$E_{eff} = \frac{\sigma_{xx}}{\epsilon_{xx}}$$

en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν.

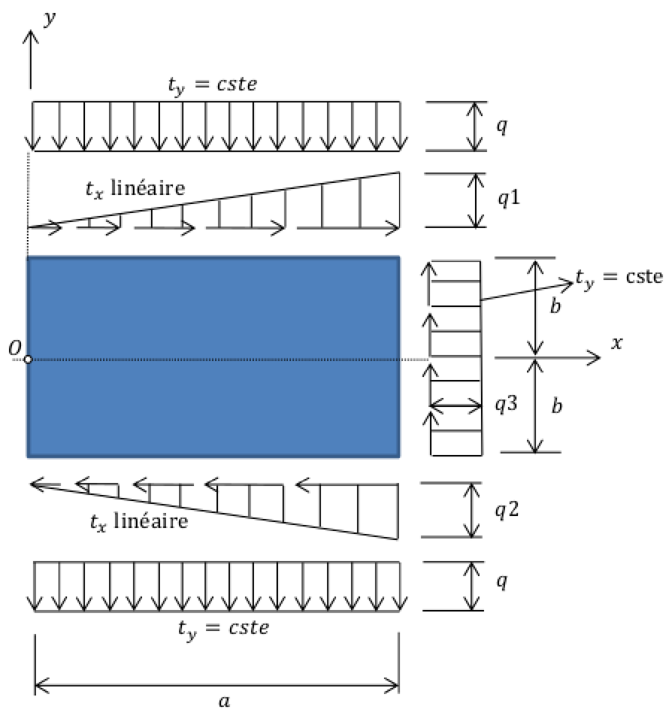
Exercice 4 :

Une paroi rectangulaire $a.2b$, d'épaisseur unité, est soumise à un état plan de contrainte par les forces de surface indiquées sur la figure ci-dessous ; seul q est connu et il n'y a pas de forces en volume. Dans les axes (x, y) donnés, on propose comme solution à ce problème le tenseur contrainte

$$\sigma_x = A_1 x + B_1 y \quad \sigma_y = A_2 x + B_2 y \quad \tau_{xy} = A_3 x + B_3 y$$

La matériau est élastique linéaire isotrope.

1. Trouver q_1, q_2 et q_3 pour que les charges extérieures soient en équilibre.
2. Démontrer que l'état de contrainte proposé est la solution exacte du problème, et trouver la valeur des constantes $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ pour qu'il en soit ainsi.


y
$t_y = cste$
q
t_x linéaire
q1
t_y = cste
b
O
x
q3
b
q2
t_x linéaire
q
$t_y = cste$
a